Letzte Woche: Parameterabschätzung mit

→ additivem Fehlermodell : $x_j = \mu + \epsilon_j$

→ normalverteiltem Rauschen : $\mathrm{pdf}(\epsilon_j | \sigma, M, I) = N(\epsilon_j ; 0, \sigma)$

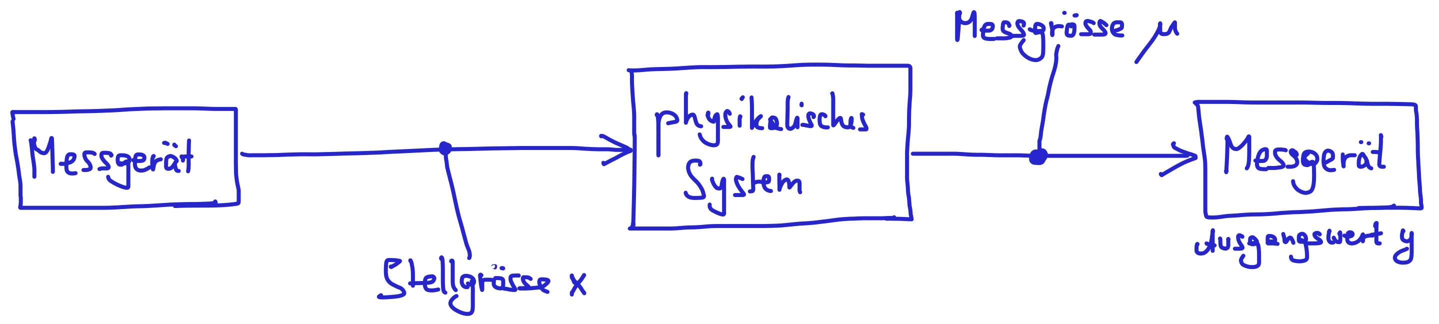
Ergebnisse:

→ Studentsche t-Verteilung für μ. $\quad \mu = \overline{x_j} \pm \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(x_j)}{N-1}}$ für $N \geq 2$

→ Inverse Gammaverteilung für σ^2. $\quad \sigma^2 = \frac{N}{N-1} \mathrm{Var}(x_j) \left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{N-3}} \right)$ für $N \geq 4$

Lineare Modelle

1. Schritt: Hintergrundinformation I



Beispiel: Messung des Halleffekts als Funktion des Magnetfeldes

Stellgrösse: Magnetfeld ; Messgrösse: Hallspannung

Messung des Orts eines Objekts als Funktion der Zeit

"Stellgrösse": Zeit ; Messgrösse: Ort

Wir beschränken uns auf physikalische Systeme mit linearer Abhängigkeit

$$\mu(x) = ax + b$$

Während der Messung setzen wir die Stellgrösse auf N diskrete Werte x_j und messen die dazugehörigen Messwerte y_j. Das gibt uns N Datenpunkte (x_j, y_j). Das Rauschen benachbarter Datenpunkte sei unkorreliert.

2. Schritt: Modell M

$y_j = \mu(x_j) + \epsilon_j \qquad$ Additives Fehlermodell

$\mathrm{pdf}(\epsilon_j | \sigma, M, I) = N(\epsilon_j ; 0, \sigma) \qquad$ normalverteiltes Rauschen

$\mathrm{pdf}(\epsilon_1 \ldots \epsilon_N | \sigma, M, I) = \prod_{j=1}^{N} N(\epsilon_j ; 0, \sigma) \qquad$ unkorreliertes Rauschen

Aus Bequemlichkeit verwenden wir von nun an die Vektornotation $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1 \ldots \epsilon_N)$, $\bar{x} = (x_1 \ldots x_N)$, $\bar{y} = (y_1 \cdots y_N)$, etc.

Von letzter Woche wissen wir: $\quad \mathrm{pdf}(\bar{\epsilon} | \tau, M, I) = \left(\frac{\tau}{2\pi} \right)^{N/2} \exp\left(-\frac{N\tau}{2} \overline{\epsilon_j^2} \right)$,

daher:

$$\boxed{\mathrm{pdf}(\bar{y} | \bar{x}, a, b, \tau, M, I) = \left(\frac{\tau}{2\pi} \right)^{N/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \overbrace{N\tau \overline{(y_j - \mu(x_j))^2}}^{\chi^2(A,B,\tau)} \right)} \quad (51)$$

Likelihood Funktion

Wir schreiben $\mu(x_j) = a x_j + b = A(x_j - \overline{x_j}) + B$, so dass $a = A$ und $b = B - A\overline{x_j}$. Damit haben wir die neuen Modellparameter A und B.

Wir betrachten die χ^2-Funktion etwas genauer:

$$\boxed{\chi^2(A,B,\tau) = N\tau \overline{(y_j - A(x_j - \overline{x_j}) - B)^2} = N\tau \left[\mathrm{Var}(x_j) \Big(A - \underbrace{\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(y_j)}{\mathrm{Var}(x_j)}} \varrho}_{:= A_0} \Big)^2 + (B - \langle y_j \rangle)^2 + \underbrace{\mathrm{Var}(y_j) \left(1 - \varrho^2 \right)}_{:= C_0} \right]} \quad (52)$$

Hierbei ist

$$\boxed{\varrho = \frac{\overline{x_j y_j} - \overline{x_j}\,\overline{y_j}}{\sqrt{\mathrm{Var}(x_j) \mathrm{Var}(y_j)}}} \quad (53)$$

der empirische Korrelationskoeffizient der Daten (x_j, y_j).

3. Schritt: Priorwahrscheinlichkeiten

Wie letzte Woche wählen wir $pdf(A) = const.$ $\quad pdf(B) = const.$

$$pdf(\tau) = \begin{cases} const. & \tau > 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

4. Schritt: Die Messung ergibt die Wertepaare (x_j, y_j)

5. Schritt: Posteriorwahrscheinlichkeit aus Bayesschem Theorem (5).

Die Posteriorverteilung kann analytisch angegeben werden. Sie lautet

$$\boxed{pdf(A, B, \tau \,|\, \bar{x}, \bar{y}, M, I) = \frac{N\sqrt{Var(x_j)}}{2\pi\, \Gamma(N/2)} \left(\frac{N\tau C_0}{2}\right)^{N/2} \exp\left[-\frac{N\tau}{2}\left(Var(x_j)(A-A_0)^2 + (B-B_0)^2 + C_0\right)\right]} \qquad (53)$$

6. Schritt: Mittelwerte und Standardabweichungen:

Die marginale Posteriorverteilung für A ist eine Studentsche T-Verteilung:

$$\boxed{pdf(A \,|\, \bar{x}, \bar{y}, M, I) = T\left(A;\, A_0,\, \sqrt{\frac{C_0}{N\, Var(x_j)}},\, N\right)} \qquad (54)$$

mit dem Mittelwert A_0 und der Varianz $\frac{C_0}{Var(x_j)(N-2)}$ (für $N \geq 3$).

Unsere Abschätzung von A ergibt also

$$\boxed{A = A_0 \pm \sqrt{\frac{C_0}{Var(x_j)(N-2)}}} \qquad (55)$$

Die marginale Posteriorverteilung für B ist ebenfalls eine Studentsche T-Verteilung:

$$\boxed{pdf(B \,|\, \bar{x}, \bar{y}, M, I) = T\left(B;\, \bar{y}_j,\, \sqrt{\frac{C_0}{N}},\, N\right)} \qquad (56)$$

mit dem Mittelwert $\bar{y}_j$ und der Varianz $\frac{C_0}{N-2}$ (für $N \geq 3$). Die Abschätzung für B ergibt also

$$\boxed{B = \bar{y}_j \pm \sqrt{\frac{C_0}{N-2}}} \qquad (57)$$

Die marginale Posteriorverteilung für τ ist die Gamma-Verteilung

$$pdf(\tau \,|\, \bar{x}, \bar{y}, M, I) = \Gamma\left(\tau;\, \frac{N}{2},\, \frac{2}{NC_0}\right)$$

Entsprechend ist die Verteilung für $\sigma^2 = \frac{1}{\tau}$ die Inverse Gammaverteilung

$$\boxed{pdf(\sigma^2 \,|\, \bar{x}, \bar{y}, M, I) = I\Gamma\left(\sigma^2;\, \frac{N}{2},\, \frac{NC_0}{2}\right)} \qquad (58)$$

mit dem Mittelwert $\frac{NC_0}{N-2}$ und Varianz $\frac{2N^2C_0^2}{(N-2)^2(N-4)}$, so dass

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{NC_0}{N-2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{N-4}}\right) \quad \text{für } N \geq 5.} \qquad (59)$$